17-1-19

$f: I \to \mathbb{R}$ κυρτή αν $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή, τότε $\forall\, a<x<y<b$

οι $f'_{\pm}(x)$, $f'_{\pm}(y)$ $\exists$ κ' ισχύει $f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y)$

<u>Θεώρημα 2</u>

Αν $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή, $x_0 \in (a,b)$, $x_1, x_2 \in (a,b) \setminus \{x_0\}$,

με $x_1 < x_2$, τότε $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

<u>Απόδειξη 1 (βάσει του Θ2)</u>

Έστω $x_0 \in (a,b)$. Θεωρώ την συνάρτηση

$g(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in (a,x_0)$

Η g είναι (από Θ2) αύξουσα

$\Rightarrow$ το $\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Έστω τυχόν $y \in (x_0, b) \Rightarrow \forall x \in (a, x_0)$

$g(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$ σταθερό

$\Rightarrow g$ άνω φραγμένη $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) < \infty$

$\Rightarrow \lim g(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f'_-(x_0)$.

Ομοίως $\exists f'_+(x_0)$

Έστω $a < x < x_0 < y < b \overset{\Theta_2}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'_-(x_0)} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

Έστω $a < x_0 < x_0' < b$

Έστω $x \in (x_0, x_0') \overset{\Theta_2}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \dfrac{f(x)-f(x_0')}{x-x_0'}$

Έστω $y \in (x, x_0') \overset{\Theta_2}{\Longrightarrow} \dfrac{f(x)-f(x_0')}{x-x_0'} \leq \dfrac{f(y)-f(x_0')}{y-x_0'}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0')}{y-x_0'}, \ \forall x_0 < x < y < x_0'$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0')}{y-x_0'}$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) \leq \lim_{y \to x_0^-} \frac{f(y)-f(x_0')}{y-x_0'} = f'_-(x_0)$$

Απόδειξη 2

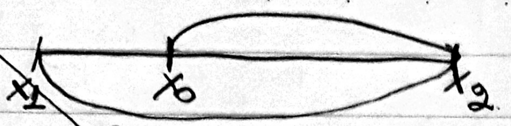
Υπάρχουν 3 περιπτώσεις

(i) $x_0 < x_1 < x_2$

(ii) $x_1 < x_2 < x_0$ } $x_0 \in (x_1, x_2)$. Η (ii) γίνεται όμοια με την (i)

(iii) $x_1 < x_0 < x_2$

(ii)



(όπου $x_1 \to x_2$
$x_0 \to x_1$)

$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

$\lambda = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$, $(1-\lambda) = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot x_2 =$

$\frac{x_0 x_1 + x_0 x_2}{x_2 - x_1} = x_0$

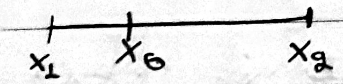
$f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) =$
$f(x_2) + \lambda (f(x_1) - f(x_2))$

$\Rightarrow \lambda (f(x_2) - f(x_1)) \leq f(x_2) - f(x_0)$

$\Rightarrow (f(x_2) - f(x_1)) \cdot \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \leq f(x_2) - f(x_0)$

$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

(iii)



$x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$

$f(x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \to \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_0) \leq$
$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\Rightarrow \lambda (f(x_0) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_0))$

$\Rightarrow \frac{x_2 - x_0}{\cancel{x_2 - x_1}} (f(x_0) - f(x_1)) \leq \frac{x_0 - x_1}{\cancel{x_2 - x_1}} (f(x_2) - f(x_0))$

$\Rightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

(i) $x_0 \quad x_1 \quad x_2$

$x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_2$

$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$, $1 - \lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$

$f(x_1) \le \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \le (\lambda - 1) f(x_0) + (1-\lambda) f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \le (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_0))$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \le \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} (f(x_2) - f(x_0))$

$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

<u>Τοπικά ακρότατα</u>

$x_0 \in (a,b)$, $f:(a,b) \to \mathbb{R}$

x_0 τ. ακρότατο της f αν $\exists\, \delta > 0$

f αύξουσα στο $(x_0-\delta, x_0)$ κ' φθίνουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$ (τοπικό μέγιστο)

f φθίνουσα στο $(x_0-\delta, x_0)$ κ' αύξουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$ (τοπικό ελάχιστο)

Αν $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$: σημείο τοπικού ελαχίστου

Αν $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$: σημείο τοπικού μεγίστου.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, $x_0 \in (a,b)$ τ.ω. $f'(x_0) = 0$. Έστω $\delta > 0$ ώ. $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$

<u>Τότε</u>: (i) Αν f' αύξουσα στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ τότε

η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0
(ii) Αν f' φθίνουσα στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0
(iii) Αν η f' παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, εκτός αν η f είναι σταθερή σε μία δεξιά ή αριστερή περιοχή του x.

Απόδειξη
(i) Αν $x \in (x_0-\delta, x_0) \to f'(x) \leq f'(x_0)=0$
Αν $x \in (x_0, x_0+\delta) \to f'(x) \geq f'(x_0)=0$
$\Rightarrow$ f φθίνουσα στο $(x_0-\delta, x_0)$ κ' αύξουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$ $\Rightarrow$ x_0 σημείο τοπικού ελάχιστου
(ii) Ομοίως
(iii) Έστω ότι η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 $\Rightarrow f'(x) \geq f'(x_0)$ σε μια περιοχή του x_0 $\Rightarrow$ Η f είναι αύξουσα σε μια περιοχή του x_0

Πόρισμα Πρότασης
Αν $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή 2η παράγωγο στο (a,b) κ' $\exists x_0 \in (a,b)$ τω $f''(x_0)=0=f'(x_0)$
(i) Αν η f'' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 $\Rightarrow$ f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0
(ii) Αν η f'' παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 $\Rightarrow$ f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0

Απόδειξη

$\exists\, \delta > 0$ τω. f'' φθίνουσα στο $(x_0-\delta, x_0)$ κ' αύξουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),\ f''(x_0) \geq f''(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Η f' είναι αύξουσα στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\xRightarrow{\text{Πρόταση}}$ f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $f'(x_0)=0$

x_0

Θεώρημα (Κριτήριο της n-οστής παραγώγου)

Έστω ότι $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, n-φορές παραγ., με συνεχή παράγωγο, $x_0 \in (a,b)$ κ' $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ κ' $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n \geq 2)$

Τότε: (i) Αν n άρτιος κ' $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0

(ii) Αν n ~~περιττός~~ άρτιος κ' $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0

(iii) Αν n περιττός η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

Απόδειξη

(i) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$, τω. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f^{(n-1)}$ είναι αύξουσα στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\xRightarrow{\text{Πρόταση}}$ $f^{(n-2)}$ παρουσιάζει τοπικό ~~μέγιστο~~ ελάχιστο στο x_0

$\xRightarrow{''}$ $f^{(n-4)}$ " " " "

$\xRightarrow{''}$ $f^{(n-6)}$ " " " " "

⋮

$\xRightarrow{''}$ f " " " " "

(ii) Όμοια με το (i)

iii) $(f')''(x_0) = (f')'''(x_0) = \dots = (f')^{(n-2)}(x_0) = 0$,
$(f')^{n-1}(x_0) \neq 0$

($n-1$ άρτιος) $\boxed{\text{Υποθέτουμε ότι } f^{(n)}(x_0) > 0}$
$\Rightarrow (f')^{(n-1)}(x_0) > 0$ .... [όπως το i]

Η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0
$\Rightarrow$ Η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, εκτός αν είναι σταθερή σε κάποια δεξιά ή αριστερή περιοχή του x_0

Αν f ήταν σταθερή σε κάποια δεξιά ή αριστερή περιοχή του $x_0 \Rightarrow f^{(n)}$ θα ήταν σταθερή σε κάποια δεξιά ή αριστερή περιοχή του $x_0 \xRightarrow{f^{(n)} \text{ συνεχής}} f^{(n)}(x_0) = 0$, άτοπο

<u>Παραδείγματα</u>

(i) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -\sin x + x$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x + 1$
$f''(0) = 0$
$f'''(x) = \sin x$
$f'''(0) = 0$
$f^4(x) = \cos x$
$f^4(0) = 1 > 0$

$f'(0) = f''(0) = f'''(0)$
$f^4(0) > 0$
$\Rightarrow 0$: είναι σημείο τοπικού ελάχιστου της f

(ii) $f(x) = x^x$ $x > 0$, $x = 1/e$
$f(x) = e^{x \ln x}$
$\Rightarrow f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x$
$f'(1/e) = 0$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \cdot x^x + 2(\ln x + 1)x^x$$

$\Rightarrow f''(1/e) > 0 \Rightarrow 1/e$ είναι σημείο τοπικού ~~ακρ~~ ελάχιστου της f.

(iii) $f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) \neq 0$

$n = 3$, περιττός $\Rightarrow$ 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακρότατου για τη f

Ορισμός

Αν $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παρ/μη κ' $x_0 \in (a,b)$ τω $\exists \delta > 0$ τω $\forall h \in (0,\delta)$,
$f''(x_0 - h) f''(x_0 + h) \leq 0$
$\Leftrightarrow$ f κυρτή σε μια αριστερή περιοχή του x_0 κ' κοίλη σε μια δεξιά περιοχή του x_0
ή f κοίλη σε μια αριστερή περιοχή του x_0 κ' κυρτή σε μια δεξιά περιοχή του x_0
Τότε το x_0 λέγεται σημείο καμπής της f

Θεώρημα

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ f n-φορές παρ/μη με συνεχή n-οστή παράγωγο $(n \geq 3)$
Αν $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ και n **περιττός** τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0